

- na konkrétních příkladech použít pravidla pro počítání s derivacemi,
- definovat derivace vyšších řádů,
- najít rovnici tečny a normály ke grafu funkce v daném bodě.

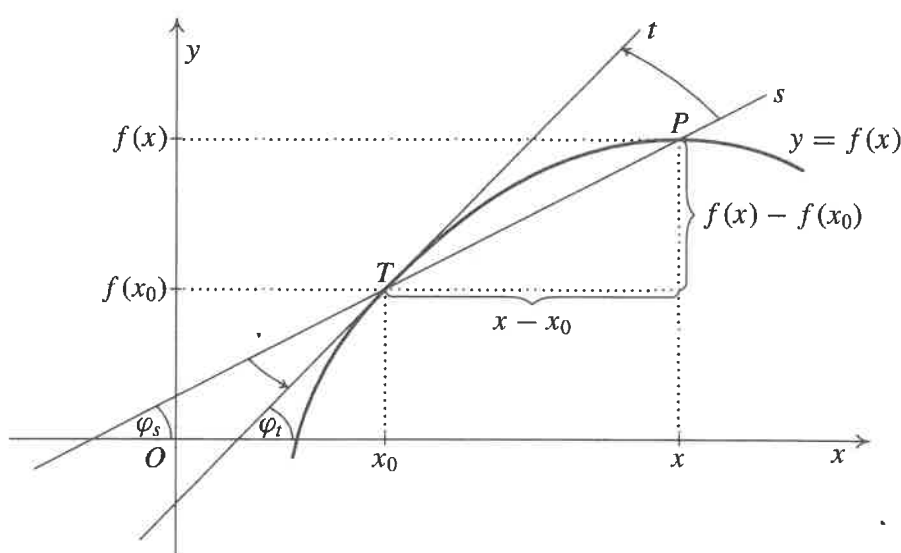
§6. 7.1 Definice derivace

pro definice

Geometrický model

Již jsme naznačili, že **geometricky je derivace funkce v daném bodě směrnici tečny k této funkci sestrojené v tomto bodě**. Pokusme se nyní směrnici tečny ke grafu funkce $f: y = f(x)$ v bodě $T = (x_0, f(x_0))$ vyjádřit. Budeme postupovat následujícím způsobem — viz obr. 7.1:

- Zvolíme bod $P = (x, f(x))$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu s grafu funkce f určenou body T a P .
- Bod x budeme přibližovat k bodu x_0 ; odpovídající bod P se „bude pohybovat“ po grafu funkce f a přibližovat se k bodu T . Sečna s se přitom bude „pootáčet“ (bude pořád procházet body T a P).
- V okamžiku, kdy x splyne s x_0 , tj. P splyne s T , přejde sečna s v přímku t , kterou nazýváme tečnou ke grafu funkce f v bodě T .
- Směrnice sečny pak přejde ve směrnici tečny.



Obr. 7.1

Vyjádříme tento postup početně.

Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky ve směrnicovém tvaru, která je určena dvěma body (x_0, y_0) a (x_1, y_1) , je

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0), \quad \text{kde } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ je směrnice přímky.}$$

Dále víme, že $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel, který svírá příslušná přímka s kladnou částí osy x .

Označme k_s **směrnici sečny** a k_t směrnici tečny a φ_s a φ_t odpovídající úhly — viz obr. 7.1. Protože sečna s je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí, že

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zajímá nás nyní **směrnice tečny**. Přibližujeme-li bod x k bodu x_0 , přejde úhel φ_s v úhel φ_t , a směrnice sečny $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ přejde ve směrnici tečny $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

Tedy

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} k_s = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud tato limita bude existovat a bude konečná, bude mít význam směrnice k_t tečny t v bodě T .

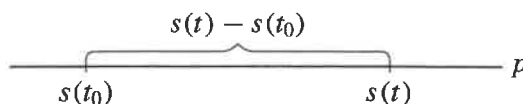
Poznámka 7.1.

1. Všimněte si, že limitu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nelze vypočítat prostým dosazením. Dostali bychom totiž limitu typu $\frac{0}{0}$.
2. Z předchozích úvah je zřejmé, že **rovnice tečny v bodě T** bude (při označení $f(x_0) = y_0$)

$$y - y_0 = k_t(x - x_0).$$

Mechanický model

Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p . Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází — viz obr. 7.2 (připouštíme, že bod se může i zastavit nebo vracet).



Obr. 7.2

Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase t_0 . Myšlenka je následující.

- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ (což je délka uvažovaného časového intervalu) je podle definice dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.
- Přibližováním okamžiku t k t_0 , tj. zkracováním uvažovaného časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v čase t_0 .

Vyjádříme opět tento postup poččetně.

Označme v_t průměrnou rychlost v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ a v_0 okamžitou rychlost v čase t_0 . Dráha, kterou bod urazí za dobu $t - t_0$, je $s(t) - s(t_0)$. Pak platí

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Tedy pro okamžitou rychlost dostaneme

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Odhlédneme-li od označení (s místo f a t místo x), vidíme, že jsme u obou modelů dospěli k vyšetřování limity obdobného podílu. Vzhledem k důležitosti této limity zavádíme následující definici.

Definice 7.2. Necht' $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0* .

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 *vlastní derivaci*.

Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci*.

Definice 7.3. Necht' $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme *derivací zprava funkce f v bodě x_0* .

Existuje-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme *derivací zleva funkce f v bodě x_0* .

V.6.1.1 Z vlastností limit (viz věta 6.13) plyne, že funkce f má derivaci v bodě x_0 , právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny. Tedy

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Poznámka 7.4.

1. Jestliže má funkce f derivaci v bodě x_0 , pak je nutně definovaná v nějakém okolí bodu x_0 .
2. Označíme-li $x - x_0 = h$, pak x se blíží k x_0 právě tehdy, když h se blíží k nule. Dosadíme-li do vzorce definujícího derivaci za x výraz $x_0 + h$, vyjde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tento vztah se rovněž používá při definici derivace.

3. Označení derivace čárkou zavedl Lagrange¹. Někdy se však pro označení derivace místo čárky používá tečka — např. píšeme $\dot{x}(t)$ (obzvláště jedná-li se o derivaci podle času).



Příklad 7.5. Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí daných předpisy

(a) $f(x) = x^2$

a) ~~$f(x) = \sin x$~~

b) $f(x) = |\sin x|$,

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. (a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$



a) Postupujeme podle definice 7.2.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \text{nebo jinak! (množitel L'Hôpitala)}$$

Derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě nula tedy existuje a je rovna číslu 1. Zamysleme se nad geometrickým významem tohoto výsledku. Již víme, že derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x . Tangens je roven 1 pro úhel $\pi/4$. Tečna tedy svírá s osou x úhel $\pi/4$ — viz obr. 7.3 a).

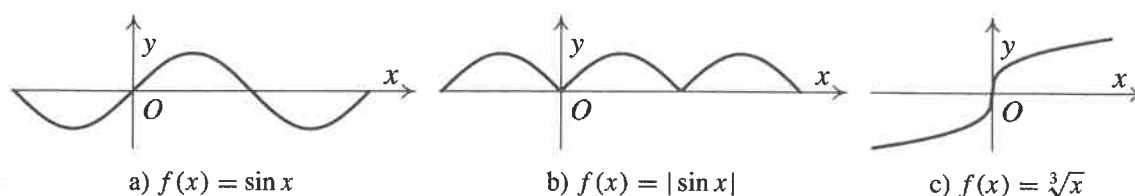
b) Vypočtíme jednostranné derivace funkce $f(x) = |\sin x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Graf funkce f má v tomto bodě jakýsi „hrot“, „špičku“. V takovém bodě nelze sestavit tečnu — viz obr. 7.3 b).

¹Joseph Louis Lagrange (1736–1813) (čti lagranž) — významný francouzský matematik a mechanik. Zabýval se mnoha oblastmi matematiky.



Obr. 7.3

c) Vypočtěme jednostranné derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Platí $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, a proto $f'(0)$ existuje a platí $f'(0) = +\infty$. Opět srovnajte výsledek s chováním grafu funkce — viz obr. 7.3 c). ▲

Příklad 7.6. Užitím definice derivace zjistěte, zda existují derivace následujících funkcí daných předpisy



- a) $f(x) = x^4 + 1$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$
v bodě $x_0 = 0$.

Řešení.

a) Budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladě.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1 - (0^4 + 1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

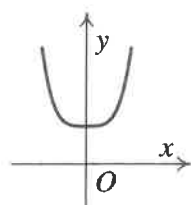
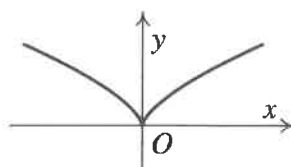
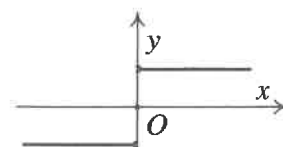
Derivace funkce f v bodě nula existuje a je rovna číslu 0. Opět se zamysleme nad geometrickým významem tohoto výsledku. Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x . Tangens je roven 0 pro úhel 0. Tečna je tedy rovnoběžná s osou x — viz obr. 7.4 a).

b) Vypočtěme jednostranné derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{0^2}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{0^2}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Z grafu funkce — viz obr. 7.4 b) — vidíme, že v tomto bodě nelze sestrojít tečnu. Graf má v tomto bodě „hrot“.

a) $f(x) = x^4 + 1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Obr. 7.4

c) Připomeňme, že funkci signum jsme definovali na str. 41.

Určeme opět jednostranné derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \\ &= -1 \cdot (-\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Platí $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, a proto $f'(0)$ existuje a platí: $f'(0) = +\infty$. Jedná se o funkci nespojitou v bodě 0. Jdeme-li po grafu funkce zleva doprava, pak „v bodě 0 musíme provést skok z -1 do 0 (směrem nahoru) a pak z 0 do 1 (opět směrem nahoru)“. Takto si u nespojitě funkce můžeme představit geometrický význam nevlastních derivací $f'_+(0) = +\infty$ a $f'_-(0) = +\infty$ — viz obr. 7.4 c). ▲

Zkuste si nyní nakreslit graf nějaké nespojitě funkce, která bude mít v bodě 0 derivaci zleva rovnu $-\infty$ a derivaci zprava rovnu $+\infty$.

V.6.1 :

Věta 7.7. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Analogické tvrzení platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

Důkaz. Necht' $x_0 \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci, tj. existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$, $A \in \mathbb{R}$. Chceme ukázat, že funkce f je spojitá, tj. že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Pro $x \neq x_0$ platí

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \\ &= A \cdot 0 + f(x_0) = 0 + f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

□

Poznámka 7.8. Věta 7.7 je velmi důležitá. Dává do souvislosti derivaci funkce v bodě a spojitost funkce v bodě. Říká, že z existence vlastní derivace funkce f v bodě x_0 plyne spojitost funkce f v bodě x_0 . **Opačná implikace ale neplatí.** Je-li funkce spojitá v daném bodě, nemusí mít v tomto bodě derivaci. Např. funkce $f: y = |\sin x|$, je spojitá v bodě $x = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci (viz příklad 7.5 b)), a tudíž ani tečnu. Také funkce $f: y = \sqrt[3]{x^2}$ je spojitá v bodě $x = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci (viz příklad 7.6 b)).

$$f: y = |x|$$

Shrňme-li naše dosavadní pozorování, dostáváme:

- Má-li funkce v daném bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.
- Má-li funkce v daném bodě nevlastní derivaci, pak v tomto bodě může být spojitá, ale nemusí. Například funkce signum (viz příklad 7.6 c)) má nevlastní derivaci a není spojitá v bodě 0 a naopak funkce $f: y = \sqrt[3]{x}$ (viz příklad 7.5 c)) má nevlastní derivaci a je spojitá v bodě 0.
- Nemá-li funkce v daném bodě derivaci, pak může, ale nemusí být v tomto bodě spojitá. Příklady spojitých funkcí, nemajících derivaci jsou 7.5 b), 7.6 b).

Na předchozích příkladech vidíme, že předpoklad vlastní derivace je ve větě 7.7 podstatný. Nevlastní derivace nezaručuje spojitost.

Je zajímavé si uvědomit, že ve větě 7.7 stačí předpokládat existenci vlastních jednostranných derivací $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a funkce f bude v bodě x_0 spojitá. Poznamenejme, že tyto jednostranné derivace mohou být různé, derivace $f'(x_0)$ tedy nemusí existovat, a přesto je f v bodě x_0 spojitá (např. funkce absolutní hodnota). Zhruba řečeno, obě vlastní jednostranné derivace dávají obě jednostranné spojitosti, a tedy spojitost.

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo. Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

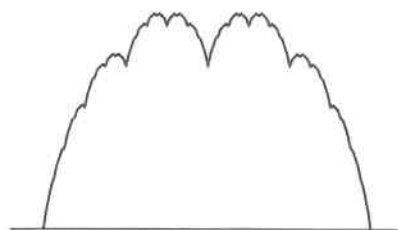
Definice 7.9. Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f': y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme **derivací funkce f na M** .

Obdobně definujeme i f'_+ , f'_- .

Uvědomme si, že, je-li $M = (a, b)$, pak musí platit

- $\forall x \in (a, b): f'(x) \in \mathbb{R}$,
- $f'_+(a) \in \mathbb{R}$,
- $f'_-(b) \in \mathbb{R}$.

Úmluva: Nebude-li dále řečeno jinak, budeme pod pojmem *derivace* rozumět *vlastní derivaci*.



Obr. 7.9

se však funkce vynalézají výhradně proto, aby byla odhalena nedostatečnost úsudků našich otců; kromě tohoto důsledku žádný jiný z nich nelze vyvodit.“ Avšak další vývoj ukázal, že tentokrát se mýlil. Jistě víte, co je to Brownův pohyb (pohyb částic, např. pylových zrněk, vlivem nárazů molekul). V r. 1920 Wiener¹ ukázal, že pohyb brownovské částice, která je tak malá, že její setrvačnost můžeme zanedbat, se děje po spojitě křivce nemající nikde tečnu. Tyto tzv. Wienerovy procesy hrají mimořádně důležitou roli v teorii stochastických procesů, které mají rozsáhlé aplikace v řadě oborů (fyzika, elektrotechnika, ekonomie apod.).

§ 7.

A)

7.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

Derivace základních elementárních funkcí — viz str. 207–208

Abychom mohli derivace úspěšně používat, je nutné se naučit derivovat základní elementární funkce, pomocí nichž pak zderivujeme ostatní elementární funkce. Uvedeme si postupně čtrnáct základních vzorců, které je nezbytné umět z paměti vzhledem k dalšímu častému použití.

$$\boxed{1} \quad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (konst.)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

$$\boxed{2} \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (7.2)$$

$$\boxed{3} \quad (\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.3)$$

$$\boxed{4} \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.4)$$

$$\boxed{5} \quad (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Poznámka 7.10.

1. Zdůrazněme, že ve vztahu (7.1) je c reálná konstanta a x je proměnná. Čteme: derivace konstanty je nula.
2. Obecně vzorec (7.2) platí pro každé $x \in \mathbb{R}^+$, ale pro některé hodnoty r je definiční obor širší — viz definice mocninné funkce na str. 73. Například:

$$(x^5)' = 5x^4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (x^{-4})' = -4x^{-5}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (0, \infty)$$

apod. Uvědomte si, že pomocí tohoto vzorce se derivují i všechny odmocniny.

¹Norbert Wiener (1894–1964) (čti viner) — významný americký matematik, zakladatel kybernetiky. Zabýval se abstraktním integrálem, funkcionalní analýzou, stochastickými procesy a kvantovou teorií.

Příklad 7.11. Pomocí definice derivace odvoďte vztahy (7.1) pro derivaci konstantní funkce a (7.3) pro derivaci funkce sinus.



Řešení.

- a) Odvoďme nejprve vztah (7.1) pro derivaci konstantní funkce. Označme $f(x) = c$. Pak dostáváme

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

- b) Označme $f(x) = \sin x$. Pak

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0. \end{aligned}$$

▲

Příklad 7.12. Vypočítejte f' , je-li f dána předpisem:

a) $f(x) = x,$

b) $f(x) = x^2,$

c) $f(x) = \sqrt{x},$

d) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$

e) $f(x) = \sqrt[7]{x}.$



Řešení.

a) $f'(x) = (x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1, x \in \mathbb{R}.$

b) $f'(x) = (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, x \in \mathbb{R}.$

c) $f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}^+.$

d) $f'(x) = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

e) $f'(x) = (x^{\frac{1}{7}})' = \frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}, x \in \mathbb{R}^+.$

▲

B) Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

V.7.1.1: Následující věta dává návod, jak spočítat derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí f a g , známe-li derivace těchto funkcí. Připomeňme, že derivací rozumíme vlastní derivaci.

Věta 7.13. *Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$ a cf , kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, mají v bodě x_0 derivaci a platí:*

$$\text{i)} \quad (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \quad (7.6)$$

$$\text{ii)} \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \quad (7.7)$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{pro } g(x_0) \neq 0, \quad (7.8)$$

$$\text{iv)} \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0). \quad (7.9)$$

Důkaz. V důkazu (i) použijeme definici derivace (7.2), definici součtu funkcí (3.20) a pravidla pro počítání s limitami (věta 6.17):

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

Důkaz vzorce pro rozdíl je analogický. Pro derivaci součinu — vztah (ii) — dostaneme

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Konečně pro derivaci podílu — vztah (iii) — platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x_0)} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right] = \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

Vztah (iv) nemusíme dokazovat, neboť se jedná o speciální případ vztahu (ii). $\square$

Poznámka 7.14.

1. Mají-li funkce f, g na množině $M \subset D(f)$ derivace f', g' , pak na M platí:

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad (f \pm g)' &= f' \pm g', & \text{ii)} \quad (fg)' &= f'g + fg', \\
\text{iii)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}, & \text{iv)} \quad (cf)' &= cf'.
\end{aligned}$$

Pro zapamatování je vhodné číst vzorce takto:

- i) „derivace součtu je součet derivací“ a „derivace rozdílu je rozdíl derivací“,
- ii) „derivace součinu je první derivovaná krát druhá nederivovaná plus první nederivovaná krát druhá derivovaná“,
- iii) „derivace podílu je derivovaný čítec krát nederivovaný jmenovatel minus nederivovaný čítec krát derivovaný jmenovatel děleno jmenovatel na druhou“,
- iv) multiplikativní konstantu (tj. konstantu, kterou se násobí) vytkneme.

2. V konkrétních příkladech často používáme místo správného zápisu $f'(x)$ ne příliš korektní označení $(f(x))'$.

Příklad 7.15. Vypočítejte f' , je-li f dána předpisem:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f(x) &= x^3 + 2x - \sin x + 2, & \text{b)} \quad f(x) &= -2 \cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7, & \text{c)} \quad f(x) &= xe^x, \\
\text{d)} \quad f(x) &= x^2 \cos x, & \text{e)} \quad f(x) &= \frac{3x - 2}{x^2 + 1}, & \text{f)} \quad f(x) &= \operatorname{tg} x.
\end{aligned}$$



Řešení. S využitím věty 7.13 dostáváme:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad f'(x) &= (x^3 + 2x - \sin x + 2)' = (x^3)' + (2x)' - (\sin x)' + (2)' = \\
&= 3x^{3-1} + 2(x)' - \cos x + 0 = 3x^2 + 2 - \cos x. \\
\text{b)} \quad f'(x) &= \left(-2 \cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7\right)' = (-2 \cos x)' + (4e^x)' + \left(\frac{1}{3}x^7\right)' = \\
&= -2(\cos x)' + 4(e^x)' + \frac{1}{3}(x^7)' = -2(-\sin x) + 4e^x + \frac{1}{3} \cdot 7x^{7-1} = \\
&= 2 \sin x + 4e^x + \frac{7}{3}x^6. \\
\text{c)} \quad f'(x) &= (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1e^x + xe^x = e^x + xe^x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= (x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x^{2-1} \cos x + x^2 (-\sin x) = \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= \left(\frac{3x-2}{x^2+1} \right)' = \frac{(3x-2)'(x^2+1) - (3x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(3 \cdot 1 - 0)(x^2+1) - (3x-2)(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Podobně jako v f) předchozího příkladu se odvodí i vzorec pro derivaci funkce $\operatorname{cotg} x$. Tedy platí

$$\boxed{6} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (7.10)$$

$$\boxed{7} \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (7.11)$$

Poznámka 7.16.

1. Často je třeba spočítat **derivaci součinu tří a více funkcí**. To lze udělat vícenásobným použitím vzorce pro derivaci součinu. Např. jsou-li f , g a h funkce mající derivaci, pak (vynecháme pro stručnost x) je

$$(fgh)' = (fg)'h + fg(h)' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Např. je-li $f: y = xe^x \sin x$, pak

$$f'(x) = (x)'e^x \sin x + x(e^x)' \sin x + xe^x (\sin x)' = e^x \sin x + xe^x \sin x + xe^x \cos x.$$

Obdobný vzorec platí pro derivaci součinu čtyř a více funkcí. Například

$$(fghk)' = f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'.$$

Předchozí vztahy pro derivace součinu tří a více funkcí je dobré si zapamatovat, neboť hodně urychlí počítání.

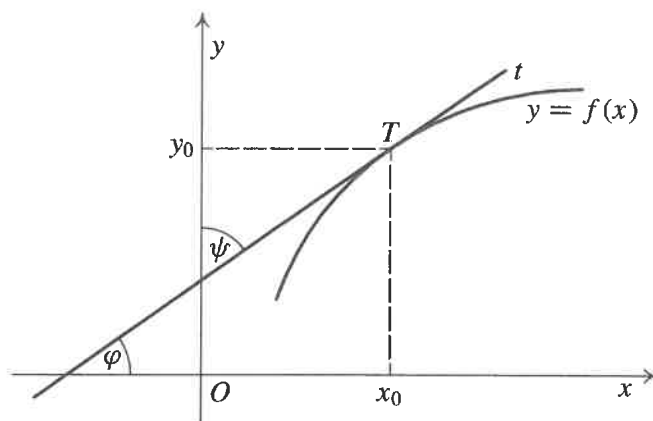
2. Je-li c konstanta, pak $(ce^x)' = c(e^x)' = ce^x$, tedy funkce ce^x je rovna své derivaci. Lze dokázat, že funkce ce^x jsou jediné funkce s touto vlastností.



Derivace inverzní funkce

Dále si všimněme výpočtu derivace inverzní funkce pomocí derivace funkce původní. To nám umožní např. spočítat derivace logaritmických a cyklometrických funkcí. Vyjdeme

z obrázku 7.10. Necht' $f: y = f(x)$ je daná funkce a $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$ inverzní funkce k funkci f (bez přeznačení proměnných). V tom případě je graf f a f^{-1} tvořen týmiž body v rovině, tedy i tečny ke grafům funkcí f a f^{-1} sestrojené v bodě $T = (x_0, y_0)$ jsou totožné.



Obr. 7.10

Derivace je, jak víme, směrnice tečny, tj. hodnota tangens jistého úhlu. Pro funkci $f: y = f(x)$ je to úhel φ , který svírá tečna s kladnou částí osy x (nezávisle proměnná je x) a pro funkci $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$ je to úhel ψ , který svírá tečna s kladnou částí osy y (nezávisle proměnná je y) — viz obr. 7.10. Je zřejmé, že pro $f'(x_0) \neq 0$ je $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$ a $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg} \psi$. Protože $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Platí tedy následující věta (předchozí geometrické zdůvodnění není samozřejmě její důkaz, ten je obtížnější).

V. 7.2. Věta 7.17. Necht' funkce $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I . Necht' y_0 je vnitřní bod intervalu I a necht' má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí,} \\ -\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající.} \end{cases}$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné derivace.

Příklad 7.18. Vypočtete derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = \ln x,$

b) $f(x) = \arcsin x.$



Řešení.

a) Uvažujme funkci $f: x = e^y$ a inverzní funkci $f^{-1}: y = \ln x$. Podle předchozí věty je

$$(f^{-1})'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

b) Uvažujme funkci $f: x = \sin y$, $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a inverzní funkci $f^{-1}: y = \arcsin x$, kde $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Podle předchozí věty je

$$(f^{-1})'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Protože na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ je $\cos y \geq 0$ a tedy $|\cos y| = \cos y$, je

$$\cos y = |\cos y| = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

a tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

avšak pouze pro $x \in (-1, 1)$ (v krajních bodech existují nevlastní jednostranné derivace $+\infty$ podle věty 7.17). ▲

Obdobně se odvodí i zbývající vzorce z následující pětice.

$$\boxed{8} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (7.12)$$

$$\boxed{9} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \quad (7.13)$$

$$\boxed{10} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1), \quad (7.14)$$

$$\boxed{11} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.15)$$

$$\boxed{12} \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$



Příklad 7.19. Vypočítejte derivaci funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}$.

Řešení. Nejprve musíme použít vzorec pro derivaci podílu. Dostaneme

$$f'(x) = \frac{(x \ln x)'(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)'}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

Výraz $x \ln x$ budeme derivovat jako součin, výraz $\arcsin x + \operatorname{arctg} x$ jako součet. Vyjde

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[(x)' \ln x + x(\ln x)'](\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x[(\arcsin x)' + (\operatorname{arctg} x)']}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2} = \\ &= \frac{(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2+1} \right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2} = \\ &= \frac{(\ln x + 1)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2+1} \right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}. \end{aligned}$$

D) Derivace složené funkce

V.7.3. Věta 7.20. Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládejme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Příklad 7.21. Vypočítejte derivaci funkce F dané předpisem:

- a) $F(x) = (3x^2 - 2x + 1)^{10}$, b) $F(x) = \sin 3x$, c) $F(x) = \ln \sin x$,
 d) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, e) $F(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.



Řešení.

- a) Vnější složka je $f(u) = u^{10}$, vnitřní složka je $u = g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
 Derivace vnější složky $f'(u) = (u^{10})' = 10u^9$ (' znamená derivaci podle u).
 Derivace vnitřní složky $g'(x) = (3x^2 - 2x + 1)' = 6x - 2$ (' znamená derivaci podle x).
 Výsledek: $F'(x) = 10(3x^2 - 2x + 1)^9(6x - 2)$ (' znamená derivaci podle x).
 b) Vnější složka je $f(u) = \sin u$, vnitřní složka je $u = g(x) = 3x$.
 Derivace vnější složky $f'(u) = (\sin u)' = \cos u$.
 Derivace vnitřní složky $g'(x) = (3x)' = 3$.
 Výsledek: $F'(x) = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$ (tento zápis je vhodnější).
 c) Vnější složka je $f(u) = \ln u$, vnitřní složka je $u = g(x) = \sin x$.
 Derivace vnější složky $f'(u) = (\ln u)' = \frac{1}{u}$.
 Derivace vnitřní složky $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$.
 Výsledek: $F'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cotg x$.
 d) Vnější složka je $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní složka je $u = g(x) = 4 - x^2$.
 Derivace vnější složky $f'(u) = (\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.

Derivace vnitřní složky $g'(x) = (4 - x^2)' = -2x$.

Výsledek: $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$

- e) Využijeme vztahu mezi exponenciální funkcí o základu a a o základu e , tj. $a^x = e^{x \ln a}$. Přitom složená funkce $F(x) = e^{x \ln a}$ má vnější složku $f(u) = e^u$ a vnitřní složku $u = g(x) = x \ln a$, kde $\ln a$ je konstanta.

Derivace vnější složky $f'(u) = (e^u)' = e^u$.

Derivace vnitřní složky $g'(x) = (x \ln a)' = 1 \cdot \ln a = \ln a$.

Výsledek je: $(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$. ▲

Tedy pomocí derivace složené funkce obdržíme předposlední vzorec našeho přehledu derivací elementárních funkcí.

$$\boxed{13} \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.17)$$

Zbývá odvodit vzorec pro derivaci obecné logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$. Protože $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, dostáváme okamžitě

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{14} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (7.18)$$

Vzorec pro derivování složené funkce nevyklučuje, že vnitřní složka g je složená funkce. Pak můžeme snadno derivovat i vícenásobně složené funkce. Například pro trojnásobně složenou funkci $F = f \circ g \circ h$ dostáváme

$$F'(x_0) = (f \circ g \circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0))) \cdot g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0).$$



Příklad 7.22. Vypočtěte derivaci funkce F dané předpisem:

a) $F(x) = \sqrt{\sin 3x}$,

b) $F(x) = \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2})$,

c) $F(x) = \sin(\sin(\sin x))$.

Řešení.

- a) Vnější složka je $f(u) = \sqrt{u}$, vnitřní složka je $g(x) = \sin 3x$, což je opět složená funkce.

Derivace vnější složky $f'(u) = (\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.

Dílčí výsledek: $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot (\sin 3x)'$.

Protože $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$ — viz předchozí příklad b) — je

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot 3 \cos 3x = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

b) Vnější složka je $f(u) = \ln u$, vnitřní složka je $g(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}$. Vnitřní složka má tvar součtu a navíc jeden její sčítanec $\sqrt{x^2 - 4x + 2}$ je znovu složená funkce.

Derivace vnější složky $f'(u) = (\ln u)' = \frac{1}{u}$.

Derivace vnitřní složky

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2})' = 1 - 0 + [(x^2 - 4x + 2)^{\frac{1}{2}}]' = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 4x + 2)' = \\ &= 1 + \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}. \end{aligned}$$

Celkový výsledek je pak

$$F'(x) = \frac{1}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}.$$

c) Budeme již postupovat rychleji

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' = \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Poznámka 7.23.

Je třeba důsledně rozlišovat zápisy

$f(x) = \sin x^2$, což je složená funkce s vnější složkou $\sin u$ a vnitřní složkou x^2 , a

$f(x) = \sin^2 x$, což je složená funkce s vnější složkou u^2 a vnitřní složkou $\sin x$ (vlastně je to zkrácený zápis pro $(\sin x)^2$).

Pro derivaci pak dostáváme

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

a

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Podobně máme $\operatorname{tg} x^2$ a $\operatorname{tg}^2 x$, $\ln x^2$ a $\ln^2 x$ atd.

Příklad 7.24. Derivujte a upravte

$$f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$



Řešení. Označme

$$f_1(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{x}.$$

Při derivaci jednotlivých funkcí použijeme věty o derivaci součinu a podílu funkcí a o derivaci složené funkce.

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}. \\ f_2'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}. \\ f_3'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Protože $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x)$, dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x+1-(x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)} = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}. \end{aligned}$$

Derivace funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$

Derivujeme-li „funkci na funkci“ $f(x)^{g(x)}$, nelze přímo použít ani vzorec $(x^n)' = nx^{n-1}$ (proměnná je jen v základu), ani vzorec $(a^x)' = a^x \ln a$ (proměnná je jen v exponentu). Musíme použít již známého vztahu

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Funkci $f(x)^{g(x)}$ budeme tedy derivovat jako složenou funkci $e^{g(x) \ln f(x)}$, tj.

$$\begin{aligned} [f(x)^{g(x)}]' &= [e^{g(x) \ln f(x)}]' = e^{g(x) \ln f(x)} [g(x) \ln f(x)]' = \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right], \quad x \in D(f) \cap D(g), \quad f(x) > 0. \end{aligned}$$



Příklad 7.25. Vypočítejte derivaci funkce f dané předpisem:

a) $f(x) = x^x$,

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Řešení.

a) Využijeme vztahu $x^x = e^{x \cdot \ln x}$. Pak derivace

$$f'(x) = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).$$

b) Nejprve funkci upravíme

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)}.$$

Derivace je pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)} \cdot (\cos x \cdot \ln(\sin x))' = \\ &= e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{1}{\sin x} \cos x\right) = \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right). \end{aligned}$$

Poznámka 7.26.

Všimněte si, že funkce $f(x) = x^x$ z předchozího příkladu neobyčejně prudce roste a nabývá brzy doslova „astronomických“ hodnot. Např. $f(1) = 1^1 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^3 = 27$, $f(10) = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$, $f(100) = 100^{100}$, což je číslo tvaru „jednička a 200 nul“ (viz také str. 80).

A) Dříve než přejdeme k dalším kapitolám, shrňme si přehledně **derivace základních elementárních funkcí**, s kterými jsme se postupně seznámili.

- 1 $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,
- 2 $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$,
- 3 $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,
- 4 $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$,
- 5 $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
- 6 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- 7 $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
- 8 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$,
- 9 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
- 10 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,

$$[11] \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$[12] \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$[13] \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R},$$

$$[14] \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}^+.$$

Je třeba si uvědomit, že známe-li derivace základních elementárních funkcí a pravidla pro derivování, pak umíme derivovat každou elementární funkci. Při výpočtu derivací je však třeba mít určitý cvik, který se získává propočítáváním velkého množství příkladů. Bezpodmínečným předpokladem je však znalost základních vzorců. Při jejich učení není účelné se vázat na proměnnou x . Je třeba vědět, že $(x^2)' = 2x$, $(s^2)' = 2s$, $(t^2)' = 2t$ atd. Derivujeme podle příslušné proměnné.

Vhodné je také učit se slovně vzorce bez proměnné, tj. např. „derivace sinu je kosinus“, „derivace kosinu je minus sinus“, „derivace přirozeného logaritmu je jedna lomeno argument“ atd.

V příkladech doposud uvedených jsme se zaměřovali pouze na výpočet derivace funkce a nezabývali jsme se definičními obory derivací. Správně bychom měli u každého příkladu určit definiční obor funkce f i derivace f' . Při určování $D(f')$ nesmíme zapomenout na to, že $D(f') \subset D(f)$. Derivováním transformujeme funkci f na funkci f' . Tato výsledná funkce může být tedy definována buď na množině stejné jako původní funkce, nebo na množině „užší“ než původní funkce.



Příklad 7.27. Vypočítejte f' a určete $D(f)$ a $D(f')$, je-li funkce f zadána předpisem

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Řešení.

a) Určíme definiční obor funkce f :

$$\begin{aligned} D(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} : [(1+x > 0 \wedge 1-x > 0) \vee (1+x < 0 \wedge 1-x < 0)] \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} : x \in (-1, 1) \} = (-1, 1). \end{aligned}$$

b) Derivujeme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^4}. \end{aligned}$$

$$15. y = (x + \sqrt{1-x^2}) \cdot e^{\arcsin x} \quad [2e^{\arcsin x}]$$

$$16. y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}} \quad \left[\frac{e^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}}{x\sqrt{x^4-1}} \right]$$

$$17. y = 2 \log_2^2 \cos^2 2x^2 \quad \left[\frac{-32x}{\ln 2} (\log_2 \cos^2 2x^2) (\operatorname{tg} 2x^2) \right]$$

$$18. y = \ln \sin \operatorname{arccotg} \frac{1+x}{1-x} \quad \left[\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} \right]$$

$$19. y = e^x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} \quad \left[e^x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}} \right]$$

$$20. y = \ln \frac{1+e^x - \sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x + \sqrt{1+e^x+e^{2x}}} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} \right]$$

F)

II.4. Derivace funkce dané implicitně

4.1. Poznámka:

Zatím jsme se setkali pouze s funkcemi typu $y = f(x)$, tedy vždy jsme měli přímo (explicitně) vyjádřeno y . Tomuto zápisu funkce budeme říkat explicitní tvar funkce. Dále se můžeme setkat s tzv. parametrickým tvarem funkce. Zde máme x , y vyjádřeno pomocí nějakého parametru t . Tedy $x = \varphi(t)$, $y = \gamma(t)$; $t \in I$, kde I je libovolný interval.

Kromě toho se můžeme setkat se situací, kdy je funkce $y = f(x)$ vyjádřena rovnicí $F(x, y) = 0$ a z této rovnice nelze obecně přímo vyjádřit y . Takový tvar funkce budeme nazývat implicitní.

Všechny tři zápisy funkce si ukážeme na velmi jednoduchém příkladě kružnice se středem v počátku a poloměrem r :
 $x^2 + y^2 = r^2$;

implicitní tvar: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (celá kružnice)

explicitní tvar: $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ (znaménko + odpovídá
horní půlkružnici, znaménko - dolní
půlkružnici)

parametrický tvar : $x = r \cos t$, $y = r \sin t$; $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(hodnota parametru $t \in \langle 0, \pi \rangle$ odpoví-
dá horní půlkružnici,
 $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ dolní půlkružnici).

4.2. Motivace:

Kružnici (resp. půlkružnici) jsme dovedli zapsat v explicitním tvaru (tento tvar funkce umíme derivovat). Ale obecně z implicitního tvaru nemusíme umět získat tvar explicitní. Proto se musíme naučit derivovat i funkci danou implicitně. To si ukážeme v následující poznámce.

4.3. Poznámka:

- (a) Nechť máme funkci danou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$. Proměnnou y v této rovnici můžeme chápat jako funkci proměnné x , tedy $y = f(x)$. Tedy naši rovnici můžeme chápat ve tvaru $F[x, f(x)] = 0$.
Máme-li nyní derivovat rovnici $F(x, y) = 0$ podle x , pak postupujeme tak, že s x zacházíme a derivujeme je tak, jak jsme zvyklí, a na y se díváme jako na funkci proměnné x a derivujeme je tedy jako složenou

funkci. (Např. $(y^2)' = 2yy'$, tj. součin derivace vnější složky a derivace vnitřní složky.)

(b) Přesnou větu o derivaci funkce dané implicitně nemůžeme zavést, neboť k tomu bychom potřebovali zavedení parciálních derivací (tedy funkci dvou proměnných). Výpočet derivace funkce dané implicitně budeme tedy provádět podle poznámky (a). Nyní si to ukážeme náhorně na následujících příkladech.

P.1. Vypočtete derivaci funkce $y = f(x)$ dané rovnici

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Rovnici kružnice si přepíšeme do tvaru $F(x, y) = 0$:

$x^2 + y^2 - 1 = 0$. Tuto rovnici derivujeme podle poznámky

4.3.(a): $2x + 2yy' = 0$. Z této rovnice za předpokladu

$y \neq 0$ explicitně vyjádříme y' : $y' = -\frac{x}{y}$.

To už je hledaná derivace funkce dané rovnici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

P.2. Vypočtete derivaci funkce $y = f(x)$ dané rovnici

$$xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0.$$

Podle poznámky 4.3.(a) dostáváme:

$$y^2 + 2xyy' - 2y - 2xy' + 3x^2 - 6yy' = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme y' :

$$y'(2xy - 2x - 6y) = -3x^2 - y^2 + 2y$$

$$y' = -\frac{1}{2} \frac{3x^2 + y^2 - 2y}{xy - x - 3y} : y \neq \frac{x}{x-3}.$$

P.3. Vypočtete derivaci funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $x \cdot \sin y = \cos y - \cos 2y$.

Rovnici si přepíšeme do tvaru

$$x \cdot \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

Derivujeme ji podle poznámky 4.3.(a):

$$\sin y + xy' \cos y + y' \sin y - 2y' \sin 2y = 0.$$

Odsud vyjádříme y' :

$$y' = \frac{\sin y}{2 \sin 2y - x \cos y - \sin y} ; x \neq \frac{2 \sin 2y - \sin y}{\cos y}.$$

P.4. Určete rovnici tečny ke křivce $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ v bodě $[1,1]$.

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ má podle poznámky 1.5.(a) rovnici $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Musíme tedy vypočítat derivaci funkce $y = f(x)$ implicitně dané rovnicí $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ v bodě $x = 1$:

$$5x^4 + 5y^4 y' - 2y - 2xy' = 0$$

$$y' = \frac{5x^4 - 2y}{2x - 5y^4} ;$$

$$y'(1) = f'(1) = -1.$$

Rovnice tečny je tedy $y - 1 = -(x - 1)$; můžeme ji přepsat do tvaru $x + y - 2 = 0$.

Příklady k procvičování:

Vypočtete derivace následujících funkcí $y = f(x)$ daných implicitně:

1. $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ $\left[-\frac{x}{2y} ; y \neq 0 \right]$

2. $(x - 1)^2 = (y + 2)^2 + 9 = 0$ $\left[\frac{x - 1}{y + 2} ; y \neq -2 \right]$

c) Z bodů a), b) ihned plyne, že

$$D(f') = (-1, 1).$$

Všimněte si přitom, že definiční obor funkce $g(x) = \frac{2}{1-x^4}$ je $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Příklad 7.28. Vypočítejte derivaci funkce f dané předpisem: $f(x) = \ln(\ln \sin x)$.

Řešení. Definiční obor zadané funkce je prázdná množina (funkce není definována pro žádné $x \in \mathbb{R}$). Tedy nemá derivaci v žádném bodě.



Derivace funkce dané implicitně - viz diplomová práce str. 19-43 (str. 40 - formula (a) + příklady)

§8. 7.3 Derivace vyšších řádů

Uvedli jsme již, že má-li funkce f první derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. na nějaké jeho podmnožině), dostáváme novou funkci f' . Tato nová funkce může mít v některém bodě x_0 opět derivaci, tj. může existovat $(f')'$ v bodě x_0 . Toto číslo nazýváme *druhá derivace* funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Tedy

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Pokud f'' opět existuje v každém bodě definičního oboru (popř. v každém bodě nějaké podmnožiny definičního oboru), dostáváme novou funkci f'' — *druhou derivaci* funkce f . Tu můžeme opět derivovat (pokud to lze) a dostáváme *třetí derivaci* v bodě x_0 ,

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

atd. Pro $n \geq 4$ již nepoužíváme pro označení derivace čárku — bylo by to příliš nepřehledné. Píšeme tedy f' , f'' , f''' , $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ atd. Přitom závorky nelze vynechat — f^3 je třetí mocnina funkce f zatímco $f^{(3)}$ je třetí derivace funkce f .

Definice 7.29. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom *n -tou derivací* (nebo *derivací n -tého řádu*) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}$ a definujeme rovností

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})',$$

přičemž $f^{(0)} = f$.

Tedy n -tá derivace je derivací $(n-1)$ -ní derivace. Pokud umíme počítat první derivace, výpočet vyšších derivací nepřináší žádné problémy. Výsledek prostě vždy opět zderivujeme. Např. třetí derivaci musíme spočítat tak, že vypočítáme nejprve první a druhou derivaci (neumíme „přímo“ vypočítat třetí derivaci). Geometrického a fyzikálního významu druhé derivace si všimneme později v oddílu 9.3.

Příklad 7.30. Vypočítejte pátou derivaci $f^{(5)}$ funkce f dané předpisem:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1.$$



Řešení. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1, & f^{(4)}(x) &= 48, \\ f''(x) &= 24x^2 - 24x + 6, & f^{(5)}(x) &= 0. \\ f'''(x) &= 48x - 24, \end{aligned}$$



Příklad 7.31. Vypočtete druhou derivaci f'' funkce f dané předpisem:

$$f(x) = x^2 \sin \sqrt{x}.$$

Řešení. Funkce má tvar součinu a druhý činitel je složená funkce.

$$f'(x) = (x^2 \sin \sqrt{x})' = (x^2)' \sin \sqrt{x} + x^2 (\sin \sqrt{x})'.$$

Přitom

$$(\sin \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} (x^{\frac{1}{2}})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Tedy

$$f'(x) = 2x \sin \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 2x \sin \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cos \sqrt{x}.$$

Získanou derivaci budeme dále derivovat. Má tvar součtu a každý sčítanec má tvar součinu. Dostaneme

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = (2x \sin \sqrt{x})' + \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cos \sqrt{x} \right)' = \\ &= (2x)' \sin \sqrt{x} + 2x (\sin \sqrt{x})' + \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right)' \cos \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} (\cos \sqrt{x})'. \end{aligned}$$

Protože

$$(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} (\sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

a derivaci $(\sin \sqrt{x})'$ již máme spočítanou, můžeme psát

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \sin \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right) = \\ &= 2 \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \frac{3}{4} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4} x \sin \sqrt{x} = \\ &= 2 \sin \sqrt{x} + \frac{7}{4} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4} x \sin \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Poznámka 7.32.

1. Počítáme-li derivace vyšších řádů funkce f , je vhodné výrazy pro f' , f'' atd. před dalším derivováním upravit a co nejvíce zjednodušit (aby se nám snáze derivovalo).
2. Všimněme si obecně derivace polynomu. V příkladu 7.30 jsme zjistili, že pátá derivace polynomu stupně čtyři je nula. Obecně platí, je-li P polynom stupně n , pak $(n + 1)$ -ná a všechny vyšší derivace jsou identicky nulové (tj. jsou rovny nule v každém bodě).
3. Připomeňme, že má-li funkce f n -tou derivaci, $n > 1$, má i všechny nižší derivace, speciálně tedy existuje f' , což podle věty 7.7 znamená, že f je spojitá. Zdůrazněme přitom, že mluvíme o vlastních, tj. konečných, derivacích.
4. Platí: $D(f^{(n)}) \subset D(f^{(n-1)}) \subset \dots \subset D(f') \subset D(f)$.

§9. **7.4 Tečna a normála**

Na závěr kapitoly o derivacích si uvedeme příklady na nalezení rovnice tečny. Předpokládejme dále, že existuje vlastní derivace funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$.

Definice 7.33. Přímka t o rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T = (x_0, f(x_0))$** .

Přímka n , která prochází bodem T a je kolmá k tečně t , se nazývá **normála ke grafu funkce f v bodě T** .

Ze střední školy víme, že má-li přímka směrnici $k \neq 0$, má přímka k ní kolmá směrnici $-\frac{1}{k}$. Tedy, má-li **tečna t ke grafu funkce f sestrojená v dotykovém bodě $T = (x_0, y_0)$** (viz obr. 7.11 a)) rovnici

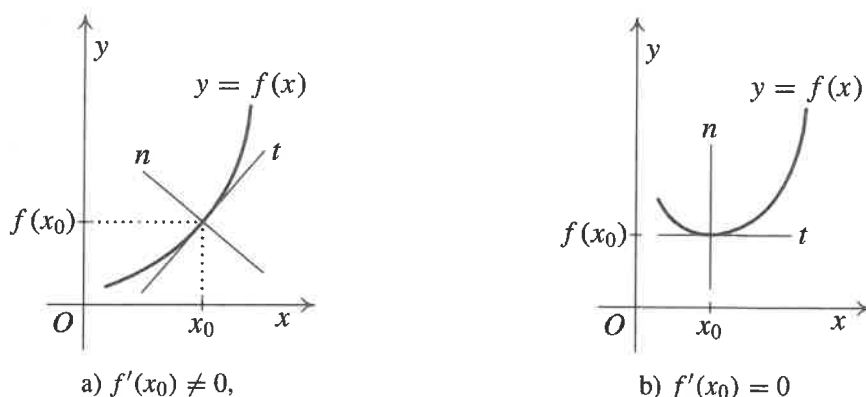
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{kde } y_0 = f(x_0),$$

pak normála n má rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{pokud } f'(x_0) \neq 0.$$

Je-li $f'(x_0) = 0$, má tečna rovnici $y = y_0$ a je rovnoběžná s osou x . Normála je pak rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = x_0$ (takové přímky nemají směrnicový tvar) — viz obr. 7.11 b).

Poznámka 7.34. Všimněte si, že připouštíme-li pouze vlastní derivaci $f'(x_0)$, pak není tečna nikdy rovnoběžná s osou y .



Obr. 7.11: Tečna a normála ke grafu funkce



Příklad 7.35. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$$

v dotykovém bodě $T = (2, ?)$.

Řešení. Nejprve určíme $f(x_0)$. Protože bod T leží na grafu funkce f , dostáváme

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \sqrt{4 - 6 + 11} = \sqrt{9} = 3.$$

Dále najdeme směrnici tečny $k_t = f'(2)$. Vypočteme (derivujeme jako složenou funkci)

$$f'(x) = [(x^2 - 3x + 11)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 11)^{-\frac{1}{2}}(2x - 3)$$

a dosadíme $x = 2$. Dostaneme

$$f'(2) = \frac{1}{2}(4 - 6 + 11)^{-\frac{1}{2}}(4 - 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Rovnice tečny tedy je $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 2)$, tj.

$$t: y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}.$$

Nyní určíme směrnici normály:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} \quad \implies \quad k_n = \frac{1}{-\frac{1}{6}} = -6.$$

Rovnice normály n pak je $y - 3 = -6(x - 2)$, tj.

$$n: y = -6x + 15.$$